Universidad Autónoma de Madrid
Lógica Matemática Hoja 5

1. Sean L un lenguaje y T una L-teoría completa. Demuestra que para todo $\mathcal{A}$ modelo de T, la L-teoría de $\mathcal{A}$, $Te(\mathcal{A})$, es equivalente a T.

2. Demuestra que las teorías de cuerpos, órdenes lineales, cuerpos de característica cero y cuerpos algebraicamente cerrados no son completas.

3. Sea L un lenguaje. Se considera el conjunto

$$\mathbb{X}_L = \{T \mid T \text{ es una } L\text{-teoría coherente y para todo } F \in Enun(L),\ F \in T \text{ ó } \neg F \in T\}.$$

Vamos a dotar al conjunto $\mathbb{X}_L$ de una topología, así a los elementos de $\mathbb{X}_L$ los llamaremos *puntos del espacio topológico* $\mathbb{X}_L$.

(i) Demostrar que los puntos de $\mathbb{X}_L$ son teorías completas, que $Te(\mathcal{A}) \in \mathbb{X}_L$, para toda L-estructura $\mathcal{A}$ y que la teoría vacía no pertenece a $\mathbb{X}_L$.

(ii) Demostrar que toda L-teoría coherente se puede extender a un punto de $\mathbb{X}_L$, es decir, para toda L-teoría coherente T_1, existe $T_2 \in \mathbb{X}_L$ tal que $T_1 \subseteq T_2$.

Se considera, para cada $F \in Enun(L)$, el siguiente subconjunto de $\mathbb{X}_L$,

$$\langle F \rangle = \{T \in \mathbb{X}_L \ :\ F \in T\}.$$

Se observa que para cada L-enunciado F y para cada $T \in \mathbb{X}_L$, se tiene que

$$T \in \langle F \rangle \Leftrightarrow F \in T.$$

Sea

$$\mathbb{B} = \{\langle F \rangle \ :\ F \text{ es un } L\text{-enunciado}\}.$$

(iii) Demostrar que todo elemento de $\mathbb{X}_L$ pertenece a un elemento de $\mathbb{B}$ y que para todo $U, V \in \mathbb{B}$ existe $W \in \mathbb{B}$ con $W = U \cap V$. Concluir que $\mathbb{B}$ es una base para una topología $\mathbb{T}$ en $\mathbb{X}_L$. Así los abiertos de esta topología son uniones arbitrarias de elementos de $\mathbb{B}$. ¿Es $\mathbb{B}$ cerrado para uniones finitas?, ¿pertenecen $\emptyset$ y $\mathbb{X}_L$ a $\mathbb{B}$?

(iv) Comprobar que los abiertos básicos del espacio $\mathbb{X}_L$ (los elementos de $\mathbb{B}$) son también cerrados.

(v) Demostrar que $\mathbb{T}$ es Hausdorff.

(vi) Demostrar que cualquier recubrimiento por abiertos de $\mathbb{X}_L$ tiene un subrecubrimiento finito, Es decir, $\mathbb{X}_L$ con la topología $\mathbb{T}$ es un espacio compacto.

4. Sean L y L' lenguajes con $L \subseteq L'$. Sea $\mathcal{A}$ una L-estructura y $\mathcal{A}'$ una L'-expansión de $\mathcal{A}$. Demuestra lo siguiente.

(i) Para cada $t(x_1, \ldots, x_n) \in Ter(L)$, $F(x_1, \ldots, x_n) \in For(L)$ y para cada $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$

$$t^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = t^{\mathcal{A}'}(a_1, \ldots, a_n) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{A} \models F(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models F(a_1, \ldots, a_n).$$

(ii) $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ satisfacen los mismos enunciados de L.

5. Demuestra que para todo lenguaje L y toda L-teoría completa T que tenga modelos, existe un lenguaje L' conteniendo a L tal que T no es completa como L'-teoría.

6. Sean L y L' lenguajes con $L \subseteq L'$ y $\mathcal{A}$ una L-estructura. Sea T' una L'-teoría conteniendo a la L-teoría $te(\mathcal{A})$. Sean $\mathcal{B}'$ una L'-estructura modelo de T' y $\mathcal{B}$ su L-reducto. Demuestra que

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}.$$